INNOVE CENTER
Economie & Développement

Working Paper **DT/18/2023**

Théorie économique de mesure des inégalités : une relation d'ordre total et sa famille d'indices

Adama Zerbo
Docteur ès Sciences Economiques,
Chercheur à Innove Center

www.innove.center

de@innove.center

adamazerbo@yahoo.fr

Théorie économique de mesure des inégalités : une relation d'ordre total et sa famille d'indices

par

Adama Zerbo[1]
Docteur ès Sciences Economiques,

Résumé

La non-découverte d'une relation d'ordre total sur l'ensemble des distributions de revenus constitue le facteur le plus limitant de la théorie économique de mesure des inégalités. Pour ce faire, ce papier s'est fixé pour objectif de trouver une relation d'ordre total sur ledit ensemble et de proposer des indices de mesure des inégalités plus pertinents. Cet objectif est atteint. En effet, une relation d'ordre total a été définie sur l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population donnée. Baptisée « relation d'ordre total de l'écart-angulaire », en plus d'être un ordre total, elle est cohérente, impartiale, continue et λ-invariante. Ainsi, la fonction d'évaluation associée à cette relation d'ordre total a permis de proposer une famille d'indices de mesure des inégalités qui respectent, entre autres, les propriétés d'impartialité, de λ-invariance, de normalité, d'indépendance par rapport à la taille de la population, ainsi que le principe de transfert entre les riches et les pauvres, et les exigences en matière de justice distributive. Aussi, contrairement aux indices déjà existants, les indices proposés sont des fonctions bijectives sur l'ensemble des distributions de la variable étudiée vers l'intervalle [0, 1]. Autrement dit, ces nouveaux indices de mesure des inégalités ont la capacité de comparer sans ambiguïté les distributions de la variable quantitative étudiée, en associant une valeur distincte à chaque situation d'inégalités. Ce papier offre donc de nouvelles perspectives de développement à la théorie de mesure des inégalités à travers la découverte de la relation d'ordre total de l'écart-angulaire.

Abstract: Economic theory of measuring inequalities: a total order relation and associated index

The non-discovery of a total order relation on income distributions set is the most limiting factor of the economic theory of measuring inequalities. Therefore, this paper aimed to find a total order relation on the said set and to propose more relevant index for measuring inequalities. This objective has been achieved. Indeed, a total order relationship has been defined on distributions set of a quantitative variable observed in a given population. Baptized "total order relation of angular deviation", this total order is coherent, impartial, continuous and λ-invariant. Thus, the evaluation function associated with this total order relation has made it possible to propose a family of index for measuring inequalities that respect, among other things, the properties of impartiality, λ-invariance, normality, independence from population size, as well as the principle of transfer between rich and poor, and the requirements of distributive justice. Also, contrary to the already existing index, the proposed index are bijective functions on distributions set towards [0, 1]. In other words, these new index for measuring inequalities have the ability to unambiguously compare distributions of the quantitative variable studied, by associating a distinct value with each inequality situation. This paper therefore offers new perspectives for the development of the theory of measuring inequalities through the discovery of the total order relation of angular deviation on distributions set.

Mots clés : Inégalités, Indice, Ordre total, Ensemble de Distributions
Keywords: Inequalities, Index, Total Order, Distributions Set
JEL classification: D30, D31, D39

[1] Je voudrais, en toute humilité, dédier ce papier à mon Pays, le Burkina Faso. La situation actuelle est certes difficile, mais elle est surtout une opportunité pour se redéfinir en tant que Nation.

Sommaire

1. Introduction

Les inégalités de revenus ont-elles augmentés ou diminués en Afrique ? Pour répondre à cette question, un non-spécialiste pourrait être tenté d'utiliser les indicateurs statistiques basiques de dispersion, tandis qu'un spécialiste utiliserait des indices de mesure des inégalités de revenus tels que ceux de Gini, de Atkinson et/ou de Theil. Qui des deux va mieux cerner les inégalités de revenus des pays africains et leurs évolutions dans le temps ? Celui qui utilise les indices de mesure des inégalités de revenus ?

En vérité, on ne sait pas. Certes, le spécialiste fera plus de calculs complexes, plus d'analyses ou de commentaires, mais on ne peut pas dire que ses estimations d'inégalités sont plus pertinentes que celui du non-spécialiste qui a utilisé des indicateurs basiques de dispersion. Parce ce que les indices de mesure des inégalités de Gini, de Atkinson, de Theil et d'autres comportent tous des insuffisances majeures qui limitent leurs capacités en tant qu'instruments d'évaluation des distributions de revenus.

D'une part, la théorie économique de mesure des inégalités qui fonde ces indices repose sur des axiomes fondamentaux dont on n'est pas certain de leur véracité. Il s'agit, entre autres, des axiomes relatifs à l'existence d'une relation d'ordre total, transitive et continue sur l'ensemble des distributions de revenus. Concernant précisément ces axiomes, Sen(1973) soutient qu'on peut également penser qu'un tel ordre total n'existe pas sur l'ensemble des distributions de revenus. Ce qui aurait pour conséquence de remettre en cause tous les résultats clés de la théorie économique de mesure des inégalités découlant de ces axiomes fondamentaux. Pour éviter un tel risque, ces axiomes sont maintenus, en dépit des doutes sur leur véracité. Cependant, la question demeure cruciale : existe-t-il, oui ou non, une relation d'ordre total sur l'ensemble des distributions de revenus ?

D'autre part, étant donné que la théorie de mesure des inégalités n'a pas encore pu définir un ordre total sur l'ensemble des distributions de revenus, les indices de mesure des inégalités sont basés sur des axiomes et/ou des quasi-ordres définis sur ledit ensemble. De ce fait, chacun de ces indices conduit souvent à des situations d'indécision lors de la comparaison des distributions de revenus parce qu'ils ne sont pas bâtis sur des fonctions d'évaluation bijectives. Par exemple, si l'indice de Gini donne des valeurs identiques pour des distributions de revenus de différentes périodes, il serait abusif de conclure que les inégalités de revenus n'ont pas changées dans le temps. En effet, l'indice de Gini est fondé sur le quasi-ordre de Lorenz qui ne permet pas de comparer toutes les distributions de revenus entre-elles. Aussi, parmi les indices de la littérature spécialisée, tous ne tiennent pas compte des opinions de justice distributive de la communauté étudiée. Pourtant, comme le soutiennent Sen (1973, 1992) et Atkinson (1970), les problèmes d'inégalités, ainsi que les solutions visant à les réduire sont étroitement liés aux structures des opinions en matière de justice distributive de la communauté concernée. De ce fait, le plus souvent, le spécialiste estime les valeurs des indices d'inégalités, les analyse en les comparant à des seuils de référence arbitraires non fondés sur les opinions de justice distributive de la communauté étudiée. Alors, tout comme la question de l'existence de la relation d'ordre complet, la définition d'indices de mesure des inégalités basés sur une fonction d'évaluation complète reste un enjeu majeur.

Au regard de ces défis, ce travail se fixe pour objectif de définir une relation d'ordre total sur l'ensemble des distributions d'une variable quantitative donnée et de proposer des indices de mesure des inégalités basés sur la fonction d'évaluation de ladite relation d'ordre. Pour ce faire, ce papier est structuré en trois sections. La première section porte sur une brève revue de littérature de la théorie de mesure des inégalités. La deuxième section est consacrée aux fondements, à la définition et aux propriétés de la relation d'ordre total, ainsi qu'à la détermination de la fonction d'évaluation. La troisième section propose une famille d'indices de mesure des inégalités basés sur ladite relation d'ordre total.

2. Brève revue de la théorie économique de mesure des inégalités

L'objectif de cette section n'est pas de présenter une revue complète de la théorie économique de mesure des inégalités, mais elle cherche à mettre en évidence les progrès, ainsi que les difficultés de ladite théorie par rapport à la recherche d'une relation d'ordre sur l'ensemble des distributions de revenus et à la construction d'indices de mesure des inégalités sur une population de taille fixée.

1. Théorie économique de mesure des inégalités et relation d'ordre

Tout comme on a besoin d'une relation d'ordre cohérente pour comparer des nombres réels, la théorie économique de mesure des inégalités a besoin d'une relation d'ordre cohérente pour comparer des distributions d'une variable quantitative (salaires, revenus, consommation, patrimoine, etc.) observée sur une population. Cependant, une relation d'ordre ayant les propriétés requises pour comparer des distributions n'a pas encore été découverte. Pour pallier cette non-découverte, la théorie économique de mesure des inégalités a opté pour des approches axiomatiques et l'utilisation de quasi-ordres sur l'ensemble des distributions.

a. Axiomes fondant la relation d'ordre total

La théorie économique de mesure des inégalités a recours à une dizaine d'axiomes pour fonder une relation d'ordre total sur l'ensemble des distributions, et lui attribuer toutes les propriétés souhaitées.[2]

Selon l'axiome 1, il existe une relation binaire totale transitive et non triviale sur l'ensemble des distributions de revenus. Cette relation d'ordre est considérée continue (axiome 2), impartiale par rapport à l'identité des individus (axiome 3), monotone (axiome 4), λ-invariante (axiome 5), μ-invariante (axiome 6) et respectant le principe de transferts (axiome 7).

Les axiomes 1 et 2 permettent de recourir au théorème de Debreu (1959) selon lequel si une relation d'ordre total est transitive et continue, alors il existe une fonction continue F_n définie sur l'ensemble des distributions de revenus et à valeurs réelles, qui représente ladite relation d'ordre. Donc, une telle fonction est une fonction d'évaluation des distributions de revenus au sens de la relation d'ordre.

L'axiome 3 permet à la relation d'ordre de tenir compte du principe d'impartialité, un principe de la justice sociale qui rend la fonction F_n symétrique. Selon cet axiome, si deux distributions sont telles que l'une est la permutation de l'autre, alors elles sont égales au sens de la supposée relation d'ordre complet.

L'axiome 4 impose que si une distribution Y est obtenue à partir d'une distribution X en augmentant le revenu d'au moins un individu, sans qu'aucun individu ne voie son revenu diminuer, alors la distribution Y est moins inégale que la distribution X au sens de la relation d'ordre. Ajouté aux trois axiomes précédents, l'axiome 4 implique que toute fonction représentative de la supposée relation d'ordre est symétrique, continue, monotone et croissante en chacun de ses arguments.

C'est l'existence d'une fonction représentative de la supposée relation d'ordre total qui permet de définir les indices de mesure d'inégalités. Pourtant, d'une part, les théoriciens de la mesure des inégalités ne sont pas unanimes sur l'existence d'une telle relation d'ordre sur l'ensemble des distributions de revenus. Pour Sen (1973), on peut penser qu'il n'existe pas une telle relation d'ordre sur l'ensemble des distributions de revenus et qu'il ne peut être défini qu'un ordre partiel. Les inquiétudes de Sen(1973) par rapport à ces axiomes seraient liées au fait que les ordres définis dans littérature sur la théorie économique des inégalités sont tous partiels.

D'autre part, l'axiome 4 relative à la monotonie de la relation d'ordre est source d'incohérence dans la relation d'ordre. En effet, avec les propriétés de transitivité et de monotonie, on arrive au fait que toute distribution de revenus est moins inégale qu'une distribution égalitaire. Pour faire la preuve, soit une

[2] Pour une présentation plus détaillée des approches axiomatique confer par exemple Gajdos (2001).

distribution quelconque $X=(x_1, \ldots, x_n)$, considérons que x_1 soit inférieur ou égal à x_i, pour tout i.[3] Considérons la distribution égalitaire $X1=(x_1, \ldots, x_1)$ dont tous les termes sont égaux à x_1. L'axiome 4 implique que $X2=(x_1, x_2, x_1, \ldots,x_1)$ est moins inégale que X1, car on peut obtenir X2 en ajoutant (x_2-x_1) au deuxième terme de X1 sans diminuer les autres termes. Ensuite, $X3=(x_1, x_2, x_3, x_1\ldots,x_1)$ est moins inégale que X2, car on peut obtenir X3 en ajoutant (x_3-x_1) au troisième terme de X2 sans diminuer les autres ; donc par transitivité X3 est moins inégale que X1 ; ainsi de suite, ... On aura à la fin : $Xn=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est moins inégale que X1. C'est-à-dire que X est moins inégale qu'une distribution égalitaire. Donc, l'axiome 4 qui permettrait à la fonction d'évaluation d'avoir les propriétés requises pour créer des indices d'inégalités pose visiblement un problème car il induit de l'incohérence dans la relation d'ordre.

En supposant que la fonction d'évaluation obtenue a les bonnes propriétés pour définir des indices de mesure des inégalités, les axiomes 5 et 6 assurent que ces indices soient invariants pour des distributions identiques à une constante multiplicative λ près ou à une constante additive μ près. Cependant, comme le souligne Gajdos (2001), la bonne propriété d'invariance que doit posséder un indice d'inégalités a été longuement débattue. En effet, si Dalton (1920) soutient qu'une augmentation du même montant de tous les revenus tend à réduire les inégalités, Kolm (1976) pense qu'une augmentation équi-proportionnelle de tous les revenus accroit les écarts absolus entre ces revenus.

L'axiome 7 est relatif à l'impact d'un transfert de revenu entre riches et pauvres sur les inégalités. Proposé par Pigou (1912) et Dalton (1920), ce principe veut que les transferts entre les riches et les pauvres qui préservent les rangs réduisent les inégalités. Cet axiome impose donc à la relation d'ordre et à l'indice de mesure des inégalités de respecter ce principe clé de la justice sociale.

b. Ordres définis sur l'ensemble des distributions

D'après Gajdos (2001), « s'il est difficile de définir explicitement l'ensemble des distributions de revenus moins inégales qu'une distribution X donnée, il est néanmoins possible de proposer un certain nombre de critères permettant d'ordonner (partiellement) les distributions de revenus ». Ainsi, des quasi-ordres ont été définis sur l'ensemble des distributions de revenus. Il s'agit principalement (i) du quasi-ordre de Lorenz, (ii) du quasi-ordre différentiel absolu et (iii) du quasi-ordre différentiel relatif.

- ***Quasi-ordre de Lorenz***

Basé sur la courbe de Lorenz, le quasi-ordre de Lorenz est de loin le quasi-ordre le plus utilisé. La courbe de Lorenz représente la fréquence cumulée des revenus en fonction de la fréquence cumulée des individus classés par ordre croissant des revenus. De ce fait, elle varie entre 0 et 1. Plus une distribution X est inégale, plus la courbe de Lorenz (L_X) est convexe. Moins une distribution X est inégale, moins la courbe de Lorenz (L_X) est convexe.

Alors pour deux distributions X et Y dont les courbes de Lorenz sont respectivement L_X et L_Y ; X est moins inégale que Y si et seulement si L_X est au-dessus de L_Y. Cependant si L_X et L_Y se croisent, le critère de Lorenz ne permet pas de conclure.

De façon plus rigoureuse, on dit que X est moins inégale que Y au sens du quasi-ordre de Lorenz si et seulement si $\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$ pour k=1, ... , n.

- ***Quasi-ordre différentiel absolu***

Le quasi-ordre différentiel absolu est basé sur les critères (i) de l'égalité des moyennes des distributions et (ii) des écarts entre les termes des distributions. L'idée est que si deux distributions ont la même

[3] Si ce n'est pas le cas, on l'obtient par permutation.

moyenne et si de plus l'écart entre deux termes successifs quelconques de l'une de ces distributions est toujours inférieur à l'écart entre deux termes successifs quelconques de l'autre distribution, alors on peut les comparer.

Alors, on dit que X est moins inégale que Y au sens du quasi-ordre différentiel absolu si et seulement si $\bar{X} = \bar{Y}$ et $x_{i+1} - x_i \leq y_{i+1} - y_i$, pour tout i= 1, …, n.

Ainsi, le quasi-ordre différentiel absolu ne peut pas comparer deux distributions qui ont des moyennes différentes et/ou des écarts absolus non ordonnées conformément au critère dudit quasi-ordre.

- ***Quasi-ordre différentiel relatif***

Le quasi-ordre différentiel relatif est basé sur le critère des rapports relatifs des termes des distributions. L'idée est que si le rapport entre deux termes successifs quelconques d'une distribution est toujours inférieur au rapport de deux termes successifs quelconques de l'autre distribution, alors on peut les comparer.
Alors, on dit que X est moins inégale que Y au sens du quasi-ordre différentiel relatif si et seulement si $x_{i+1}/x_i \leq y_{i+1}/y_i$, pour tout i= 1, …, n.

Le quasi-ordre différentiel relatif ne peut pas comparer deux distributions de revenus dont les rapports des termes ne sont pas ordonnés conformément à son critère.

En définitive, on peut dire qu'en théorie une relation d'ordre complète ayant toutes les propriétés requises a été fondée sur l'ensemble des distributions de revenus à l'aide de plusieurs axiomes. Cependant, dans la pratique, les indices d'inégalités sont bâtis à partir de quasi-ordres.

2. Indices de mesure des inégalités

Plusieurs indices de mesure des inégalités de revenus ont été proposés dans la littérature économique sur la base de quasi-ordres présentés ci-dessus, d'approches axiomatiques ou de la théorie de l'information (principe d'entropie généralisée). Les plus connus sont les indices de Atkinson-Kolm-Sen (indices de Atkinson), les indices de Kolm Pollak, l'indice de Gini et l'indice de Theil.

a. Indices de Atkinson et de Kolm Pollak.

Les indices de Atkinson sont basés sur une approche axiomatique de la mesure des inégalités, qui s'articule autour du principe de transfert, des axiomes d'invariance et d'un axiome de « décomposabilité » (axiome 8) (Kolm 1976a, Kolm 1976b, Atkinson 1970 et Sen 1973).

L'axiome de « décomposabilité » assure que les indices de Atkinson soient décomposables. Cet axiome implique que si certains termes d'une distribution sont modifiés, l'évaluation de ce changement ne dépendra que de ces termes modifiés. Autrement dit, la différence d'évaluation de deux distributions ne dépend pas des parties communes à ces distributions. Ainsi, ajouté aux axiomes précédents, l'axiome de décomposabilité implique qu'il existe une fonction u_n continue et croissante, unique à une transformation affine près, définie sur D vers IR, telle que :

$$F_n(X) = \sum_{i=1}^{n} u_n(x_i) \qquad (2.1)$$

Donc selon l'approche de Atkinson-Kolm-Sen, la fonction d'évaluation collective est la somme des évaluations individuelles qui se font sur la base d'une unique fonction évaluation.

Ayant obtenu une fonction d'évaluation, Kolm (1976a et 1976b) et Atkinson (1970) supposent que la relation d'ordre sur D^n vérifie tous les axiomes précédents, sauf l'axiome 6 (μ-invariance) ; puis ils définissent un indice relatif qui serait complètement caractérisé à un paramètre près. Connu sous le nom d'indice d'Atkinson, l'expression de cet indice est donnée par la relation (2.2).

$$\begin{cases} IA_n(X) = 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\bar{X}}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \ pour\ \varepsilon \neq 1 \\ IA_n(X) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\bar{X}}\right)^{\frac{1}{n}} \quad , \ pour\ \varepsilon = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

En remplaçant l'axiome 5 (λ-invariance) par l'axiome 6 (μ-invariance), Kolm (1976a et 1976b) propose un indice de mesure des inégalités absolues, connu sous le nom d'indice de Kolm-Pollak dont l'expression est donnée par la relation (2.3).

$$IK_n(X) = \frac{1}{\alpha} ln\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha(x_i-\bar{X})}\right], \alpha > 0 \tag{2.3}$$

Les indices de Atkinson et de Kolm Pollak ont fortement contribué à l'analyse des inégalités de revenus aussi bien dans les pays développés que dans les pays en développement. Par exemple, l'indice de développement humain ajusté aux inégalités (IDHI) du Programme des nations unies pour le développement est fondé sur les principes de la famille des indices de Atkinson (PNUD 2010 et 2011). Cependant, plusieurs insuffisances ont été relevées dans la littérature spécialisé par rapport aux indices de Atkinson et de Kolm Pollak.

D'abord Gajdos (2001) soutient que les indices de Atkinson-Kolm-Pollak sont extrêmement rigides car un indice de Atkinson-Kolm-Pollak vérifiant la propriété de λ-invariance ou de μ-invariance, et respectant l'ordre différentiel absolu ou l'ordre différentiel relatif, respecte forcement le principe de transfert. Aussi, cet auteur fait remarquer que l'influence d'un transfert d'un pauvre vers un riche sur le niveau de l'indice d'Atkinson sera d'autant plus faible que le paramètre ε sera petit. Et lorsque ε=1, un tel transfert n'aura aucun effet sur l'indice d'Atkinson.

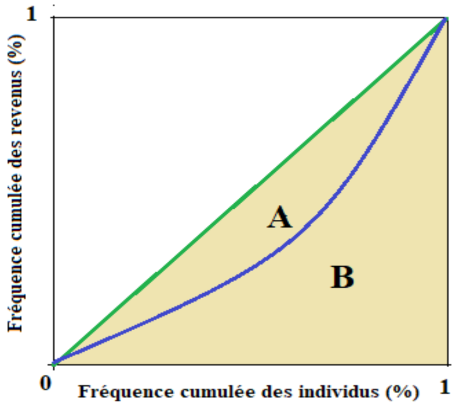
Par ailleurs, des paradoxes concernant l'indice de Atkinson ont été soulevés par Sen (1973, 1978) et Hanson (1977). En effet, selon Atkinson, le paramètre ε reflète le degré d'aversion de la collectivité à l'égard des inégalités. Cependant, plus le paramètre ε est faible, plus un transfert d'un pauvre vers un riche accroit l'écart de bien-être entre ces individus, et moins ce transfert accroit les inégalités mesurées par l'indice d'Atkinson (paradoxe de Sen). Aussi, Hanson (1977) constate que pour une distribution donnée des revenus, l'indice de Atkinson baisse lorsque le paramètre ε diminue ; mais plus ce paramètre est faible, plus l'écart de bien-être entre les individus, évalué à partir des fonctions d'évaluation individuelles, est élevé. Ainsi, comme l'indique Gajdos (2001), ces paradoxes soulèvent un véritable doute quant à la pertinence de l'indice d'Atkinson.

b. Indice de Gini

L'indice de Gini est l'indice le plus célèbre et le plus utilisé. A la différence des indices de Atkinson-Kolm-Sen, l'indice de Gini n'est pas basé sur une approche axiomatique. Il est basé sur la courbe de Lorenz ou le quasi-ordre de Lorenz présenté dans la sous-section précédente.

On a vue dans la sous-section précédente que plus une distribution X est inégale, plus la courbe de Lorenz sera convexe, c'est-à-dire plus cette courbe s'écartera de la première bissectrice. A l'inverse, moins la distribution X est inégale, moins la courbe de Lorenz sera convexe, c'est-à-dire plus cette courbe se rapprochera de la première bissectrice (figure 2.1). Alors, Gini a eu l'idée de proposer comme indice de mesure des inégalités, le ratio de l'aire comprise entre la courbe de Lorenz et la première bissectrice (A) par rapport à l'aire totale de la demi-portion du carré (A+B) : $G = A/(A + B)$.

Figure 2.1 : La courbe de Lorenz



Plusieurs formules de calcul de l'indice de Gini existent dans la littérature. Ces formules diffèrent les unes des autres selon les méthodes utilisées pour le calcul des aires A et A+B. La relation (2.4) présente l'une des formules de l'indice de Gini les plus utilisées. A travers cette formule, on aperçoit que l'indice de Gini est égal à la moyenne des écarts absolus entre les revenus pris deux à deux divisée par la moyenne des revenus.

$$G = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_i - x_j|}{\bar{X}} \qquad (2.4)$$

En tant que l'indice des inégalités le plus célèbre, l'indice de Gini a été utilisé pour définir d'autres indices de mesure des inégalités, notamment l'indice de Kakwani (1977). Aussi, l'indice de Gini est beaucoup utilisé dans les pays en développement pour calculer notamment les inégalités de dépenses de consommation des ménages et apprécier leur évolution entre les différentes périodes d'enquêtes sur les conditions de vie des ménages, en vue d'orienter les politiques de croissance économique et de réduction de la pauvreté.

Cependant, conclure que les inégalités de consommation ou de revenus ont baissé, augmenté ou sont restées inchangées entre deux périodes sur la base de l'indice de Gini, c'est oublier que cet indice, comme les autres d'ailleurs, n'est pas fondé sur un ordre total, mais plutôt sur un quasi-ordre qui ne permet pas de comparer toutes les distributions de revenus ou de dépenses. En effet, lorsque les courbes de Lorenz relatives à deux distributions se coupent, l'indice de Gini ne permet pas de conclure que telle distribution est moins inégale ou plus inégale que l'autre. Aussi, si les courbes de Lorenz des distributions sont symétriques par rapport à la seconde diagonale du carré, les valeurs de l'indice de Gini seront égales ; mais cette égalité ne signifie pas systématiquement que les inégalités sont demeurées constantes (Mesnard 1997).

c. Indice de Theil

Fondé sur le principe d'entropie généralisée, l'indice de Theil (1967) possède la propriété de décomposabilité. De ce fait, l'indice de Theil de la population globale est la somme pondérée des inégalités intra-groupes et des inégalités inter-groupes. Il mesure l'entropie de la distribution des revenus, alors plus la distribution de revenus s'éloigne de la situation d'égalité absolue, plus l'indice de Theil sera élevé. Il existe dans la littérature plusieurs versions de l'indice de Theil.

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\bar{X}} \log\left(\frac{x_i}{\bar{X}}\right) \qquad (2.5)$$

La version de l'indice de Theil donnée par la relation (2.5) peut être interprété comme une moyenne pondérée des écarts logarithmiques des revenus par rapport au revenu moyen. Dans une situation parfaitement égalitaire, ces écarts logarithmiques sont nuls, donc T=0.

Ainsi, à la différence des indices de mesure des inégalités présentés dans les paragraphes précédents, l'indice de Theil n'est basé ni sur une relation d'ordre ni sur une approche axiomatique de mesure des inégalités. Aussi, il ne permet pas de tenir compte de la justice distributive de la communauté dans la mesure des inégalités.

Cette brève revue de littérature a montré que les théoriciens de la mesure des inégalités ont consentis beaucoup d'effort pour développer des indices de mesure des inégalités de revenus. Certains d'entre eux ont utilisé des approches axiomatiques qui supposent, entre autres, l'existence d'un ordre total sur l'ensemble des distributions de revenus. D'autres en revanche ont utilisé des approches purement statistiques en se basant sur des quasi-ordres définis sur l'ensemble des distributions ou sur des modèles d'entropie généralisée. Cependant, selon les critiques formulés dans la littérature spécialisée, les indices proposés comportent des insuffisances majeures qui limitent leurs capacités à appréhender les inégalités et leurs évolutions. Cette situation est principalement liée au fait que la théorie de la mesure des inégalités n'a pas encore pu trouver une relation d'ordre total sur l'ensemble des distributions de revenus.

Pour ce faire, la section suivante investigue pour définir une relation d'ordre total sur l'ensemble des distributions d'une variable quantitative donnée observée sur une population de taille fixée.

3. Relation d'ordre total sur l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille fixée.

Avant d'entamer les investigations sur la relation d'ordre total, précisons ce que c'est que l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n.

D'abord, la variable quantitative dont il est question ici peut concerner aussi bien (i) les variables monétaires telles que les salaires des individus, les revenus, les dépenses de consommation et le patrimoine des ménages, que (ii) les variables non monétaires telles que la durée de scolarisation des adultes dans une population, la prévalence du paludisme chez les enfants de 6-59 mois dans les ménages et la durée annuelle du sous-emploi des individus selon le temps de travail. C'est pour des questions évidentes de commodités que nous emploierons souvent le terme générique « ensemble des distributions de revenus » pour désigner « l'ensemble des distributions de la variable quantitative observée sur une population de taille n fixée ».

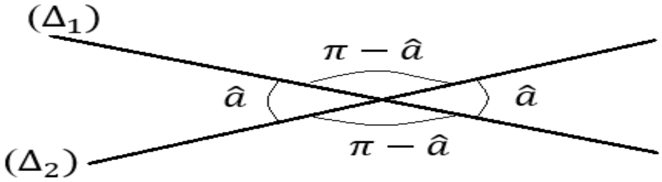
Alors, une distribution d'une variable quantitative observée sur une population de taille n correspond à un ensemble possible des valeurs qui peut être observées chez les individus de ladite population à une date donnée et pour une valeur totale de ladite variable. Ainsi, si chaque individu de la population est identifié par un indice i, avec i allant de 1 à n (noté i =1, …, n), une distribution X de la variable étudiée correspond à $X = (x_1, \dots, x_n)$ où x_i désigne la valeur de la variable étudiée de l'individu i. Il faut noter que pour chaque valeur totale de la variable étudiée, il existe plusieurs répartitions possibles entre les individus. Donc, il existe plusieurs distributions X possibles, qui dépendent de la somme totale et de la répartition entre les individus. Toutes ces distributions X possibles constituent l'ensemble des distributions de la variable quantitative observée sur la population de taille n. On note par D^n cet ensemble des distributions de la variable quantitative étudiée. Avec les précisions ci-dessus, il ressort que $\mathrm{D}^n = \mathrm{IR}^n$, IR étant l'ensemble des nombres réels. Evidemment, la taille n de la population concernée est supérieure ou égale à 2, sinon on ne peut pas envisager des inégalités.

Pour mesurer correctement les inégalités, il est nécessaire de disposer d'une relation d'ordre total sur D^n. Cependant, aucun ordre total n'a encore été trouvé sur D^n. Seules des relations d'ordre partiel ont été définies sur D^n. Pour ce faire, cette section vise à définir une relation d'ordre total sur D^n qui répond aux critères requis. Cette audacieuse ambition est basée sur une idée mathématique simple, qu'il convient de présenter avant de passer à la construction dit de la relation d'ordre total.

1. *Idée de base de la relation d'ordre total*

Avant de présenter l'idée de base, il convient de préciser la notion d'écart-angulaire entre deux droites sécantes qui est utilisée tout au long de ce travail. Comme illustré par la figure 3.1, deux droites sécantes forment quatre angles dont les angles opposés sont égaux. La notion d'écart-angulaire utilisée dans ce travail fait référence au plus petit angle entre les deux droites considérées, c'est-à-dire l'angle $\hat{a}$ sur la figure 3.1.

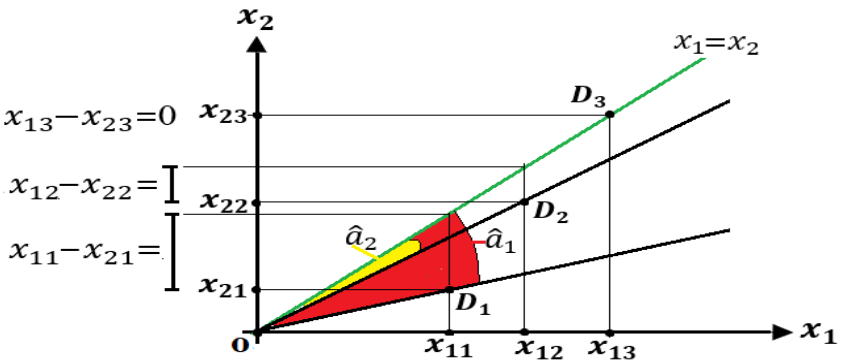
Figure 3.1 : Ecart-angulaire entre deux droites sécantes



Cet écart-angulaire est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. En effet, pour confirmer cela, supposons que l'écart-angulaire $\hat{a}$ est supérieur à $\frac{\pi}{2}$; dans ce cas $\hat{a}$ n'est pas le plus petit angle formé par les deux droites car on aura : $\hat{a} > \frac{\pi}{2} > \pi - \hat{a}$.

Plus les deux droites ont tendance à se rapprocher/confondre, moins l'écart-angulaire sera élevé. L'écart-angulaire est égal à 0 si et seulement si les deux droites sont confondues. L'écart-angulaire est égal à $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si les deux droites s'écartent le plus possible l'une de l'autre, autrement dit, lorsqu'elles sont perpendiculaires.

Figure 3.2 : Ecart-angulaire de la distribution observée et de la distribution égalitaire



Source : Le présent papier

Ces précisions sont certes évidentes ; mais elles sont importantes pour comprendre et apprécier l'idée de base de la relation d'ordre total établie sur D^n. L'idée de base de la relation d'ordre sur D^n est illustrée à travers la figure 3.2. Cette illustration est faite pour n=2. Autrement dit, on considère deux individus dont les montants respectifs de leur revenu sont désignés par $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$. Le revenu de l'individu 1 est représenté par l'axe des abscisses et celui de l'individu 2 par l'axe des ordonnées.

Supposons qu'on a observé les revenus de ces deux individus à trois dates différentes t (t=1, 2, 3). Les trois distributions $D_1(x_{11}, x_{21})$, $D_2(x_{12}, x_{22})$ et $D_3(x_{13}, x_{23})$, correspondant aux trois dates d'observation sont représentées sur la figure 3.2. Aussi, on représente la première bissectrice (droite verte).

Chacune des droites joignant l'origine du plan (O, x_1, x_2) et le point D_t, à savoir la droite (OD_t), forme un angle $\hat{a}_t$ avec la première bissectrice. On observe que plus l'écart de revenu entre les deux individus, à savoir $x_{1i} - x_{2i}$, est élevé, plus l'écart-angulaire $\hat{a}_t$ est grand. Ainsi, on a : $x_{11} - x_{21} > x_{12} - x_{22}$ et $\hat{a}_1 > \hat{a}_2$. Aussi, on a : $\hat{a}_3 = \hat{0}$ et $x_{13} - x_{23} = 0$.

Ce constat n'est pas le fruit du hasard. En effet, la première bissectrice représente tous les points du plan (O, x_1, x_2) correspondant à des distributions égalitaires de revenus entre les deux individus. Alors, plus une distribution de revenus est plus égalitaire, moins la droite passant par O et le point de cette distribution sera écartée de cette bissectrice. A l'inverse, plus une distribution est inégalitaire, plus la droite passant par O et le point de cette distribution sera écartée de cette bissectrice. Ainsi, l'écart-angulaire entre la droite (OD_t) est plus ou moins grand selon que la distribution est plus ou moins inégalitaire. Donc, l'écart-angulaire $\hat{a}_t$ rend compte des inégalités de la distribution observée par rapport à la distribution égalitaire.

Aussi, on remarque que toute distribution D_k située sur une droite (OD_t) est identique à la distribution D_t à une constante multiplicative près. Autrement dit, si D_k est situé par exemple sur (OD_1), alors il existe une constante λ, telle que $D_k = \lambda D_1$; i.e. $D_k(\lambda x_{11}, \lambda x_{21})$. Cela est lié au fait que tous les points d'une droite passant par l'origine O du plan, obéissent à une même relation linéaire (y=ax). Donc, toutes les distributions identiques à une constante multiplicative près forment le même écart-angulaire avec la première bissectrice.

Par ailleurs, si on permute les termes d'une distribution quelconque entre les deux individus (on permute les revenus entre les individus), l'écart-angulaire formé par la droite obtenue avec le point-permuté (noté D_{pt}), à savoir (OD_{pt}) avec la première bissectrice est égal à l'écart angulaire formé par (OD_t) avec cette bissectrice. Réciproquement, si deux distributions D_j et D_k forment des écarts-angulaires égaux, de part et d'autre de la première bissectrice, alors la distribution-permutée D_{pj} de D_j est situé sur la droite (OD_k). Donc, il existe un réel λ, tel que $D_k = \lambda D_{pj}$. Comme D_{pj} et D_j sont identiques, alors D_j et D_k sont identiques à une constante près. Ces propriétés de symétrie des distributions sont liées au fait que l'opération de permutation de deux coordonnés correspond à la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice. Donc, (OD_t) et (OD_{pt}) étant symétriques par rapport la première bissectrice, si on mesure les deux écarts-angulaires en tenant compte de leurs sens respectifs, on aura : $\hat{a}_t = -\hat{a}_{pt}$. De ce fait, le signe de l'écart-angulaire n'est donc pas nécessaire pour caractériser/identifier les distributions.

Aussi, il est important de noter que toute distribution forme un écart-angulaire avec la première bissectrice. C'est-à-dire qu'à toute distribution D_j, on peut lui associer un écart-angulaire unique. Donc si on considère deux distributions D_j et D_k quelconques, l'écart-angulaire $\hat{a}_j$ formé par la droite (OD_j) avec la première bissectrice sera soit supérieur, soit inférieur, soit égal à l'écart-angulaire $\hat{a}_k$ formé par la droite (OD_k) avec cette bissectrice :

- si $\hat{a}_j > \hat{a}_k$, cela indique que la droite (OD_j) qui représente la distribution D_j est plus éloignée de la droite de la distribution égalitaire que la droite (OD_k) représentant la distribution D_k ; alors dans ce cas la distribution D_k est moins inégale que la D_j ;
- si $\hat{a}_j < \hat{a}_k$, cela indique que la droite (OD_j) qui représente la distribution D_j est moins éloignée de la première bissectrice (droite de la distribution égalitaire) que la droite (OD_k) représentant la distribution D_k, alors dans ce cas la distribution D_j est moins inégale que la D_k ;
- si $\hat{a}_j = \hat{a}_k$, cela indique que les distributions D_j et D_k sont identiques à un réel multiplicatif près.

Sur la base donc des écarts-angulaires, on peut toujours définir l'ordre entre deux distributions quelconques. En effet, si on suppose qu'il existe deux distributions D_j et D_k dont l'ordre ne peut être défini, cela signifierait qu'on peut leur associer deux réels correspondant aux écarts-angulaires respectifs qu'on ne peut pas comparer. Ce qui est impossible car on peut toujours comparer deux réels.

Inversement, à tout réel de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on peut lui associer une distribution D_j représentant l'ensemble des autres distributions λ-identiques. En effet, soit un réel α de cet intervalle, il existe une droite (Δ) qui coupe la première bissectrice au point d'origine O et qui forme un écart-angulaire α avec cette bissectrice. Un point quelconque de cette droite (Δ) est une distribution de revenus qui représente de toutes autres les distributions λ-identiques.

Aussi, on constate sur la figure 3.2 que la distribution D_2 est moins inégale que la distribution D_1 car $\hat{a}_1$est supérieur à $\hat{a}_2$. Aussi, on a la distribution D_3 qui est moins inégale que la distribution D_2 car $\hat{a}_2$ est supérieur à $\hat{a}_3$. De façon transitive, la distribution D_3 qui est moins inégale que la distribution D_1.

En fait, la relation d'ordre basée sur l'écart-angulaire avec la première bissectrice a les propriétés de la relation d'ordre classique sur IR. En effet, la fonction « écart-angulaire » est une relation bijective entre l'ensemble des distributions et l'intervalle [0, $\frac{\pi}{2}$], toutes les distributions λ-identiques étant considérées comme une seule distribution.

Bien que vous soyez peut-être déjà convaincu, cet exposé de l'idée de base de la relation d'ordre n'est pas une preuve suffisante pour conclure que la relation d'ordre basée sur l'écart-angulaire est cohérente et totale. Cette idée mérite d'être fondée sur des preuves mathématiques solides et d'être généralisée sur l'ensemble des distributions D^n.

2. *Relation d'ordre total de l'écart-angulaire sur l'ensemble des distributions*

Avant de généraliser cette idée, nous devons d'abord faire la preuve du principe sur lequel elle s'appuie, à savoir que « moins la droite (OD) représentant une distribution est écartée de la première bissectrice, moins cette distribution est inégale ». Pour donner plus de solidité à ce principe, nous l'érigeons en un théorème, suivi de sa preuve.

a. *Théorème fondamental de la relation d'ordre total de l'écart-angulaire*

Théorème fondamental de la relation d'ordre total de l'écart-angulaire

Soient :

- D^n l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n, n>=2 ;
- $X = (x_1, \dots, x_n)$ une distribution appartenant à D^n ;
- D_X le point de cordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}_1, \dots, \vec{\imath}_n)$;
- $\hat{a}_X$ l'écart-angulaire formé par la droite (OD_X) avec la première bissectrice du repère orthonormé.

Alors, moins l'écart-angulaire $\hat{a}_X$ est élevé, moins la variance de la distribution X est élevée. Réciproquement, moins la variance de X est élevée, moins l'écart-angulaire $\hat{a}_X$ est élevé.

<u>Preuve du théorème</u>

Pour faire la preuve du théorème fondamental, considérons le vecteur-unité du repère orthonormé, à savoir le vecteur $\vec{u} = (1, \dots, 1)$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la première bissectrice (la droite des distributions égalitaires). Considérons également le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{OD_X}$, alors $\vec{w} = (x_1, \dots, x_n)$.

Comme dans le théorème, notons $\hat{a}_X$ l'écart-angulaire formé par la droite (OD_X) avec la première bissectrice. Alors, la valeur absolue de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$ est égale à $\hat{a}_X$. Calculons le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{w}$ de deux manières :

- en utilisant l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$: $\vec{u}.\vec{w} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \left(n \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cos(\hat{a}_X)$
- en utilisant les coordonnées : $\vec{u}.\vec{w} = \sum_{i=1}^{n}(1 \times x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Si on égalise ces deux expressions du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{w}$, et on exprime cos $(\hat{a}_X)$ en fonction des x_i, cela donne la relation (3.1) suivante :

$$\cos(\hat{a}_X) \ = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\left(n \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}} \qquad (3.1)$$

Si on élève la relation (3.1) au carré, avec un petit arrangement astucieux concernant n, on obtient la relation (3.2), où $\bar{X}$ désigne la moyenne arithmétique de X et $\overline{X^2}$ désigne la moyenne arithmétique du carré de X. Cette relation indique que le cosinus carré de l'écart-angulaire associé à une distribution quelconque X est égal au ratio entre le carré de la moyenne de X et la moyenne du carré de X.

$$\cos^2(\hat{a}_X) \ = \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{(\bar{X})^2}{\overline{X^2}} \qquad (3.2)$$

Maintenant, calculons la variance de la distribution $X = (x_1, \dots, x_n)$, notée V(X). On sait que par définition, la variance de X est égale à la moyenne des carrés des écarts des x_i par rapport à la moyenne arithmétique de X. Si on développe cette formule de la variance et on effectue les regroupements adéquats, on obtient la relation (3.3). Cette relation indique que la variance d'une distribution quelconque X est égale à la différence entre la moyenne du carré de X et le carré de la moyenne de X.

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2 - 2x_i\bar{X} + (\bar{X})^2\right]$$

$$V(X) = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 \qquad (3.3)$$

A partir des égalités (3.2) et (3.3), on obtient la relation (3.4) qui exprime le cosinus carré de l'écart-angulaire associé à X en fonction de la variance de X.

$$\cos^2(\hat{a}_X) \ = \frac{(\bar{X})^2}{V(X)+(\bar{X})^2} \qquad (3.4)$$

Selon cette égalité, le cosinus carré de l'écart-angulaire associé à une distribution quelconque X de D^n et sa variance V(X) sont inversement liés. Ainsi, plus la variance d'une distribution est élevée, moins le cosinus carré de l'écart-angulaire associé à cette distribution sera élevé. Moins la variance d'une distribution est élevée, plus le cosinus carré de l'écart-angulaire associé à cette distribution sera élevé. Lorsque la variance est nulle, i.e. lorsque la distribution est égalitaire, le cosinus carré est maximal et égal à 1.

La fonction $\cos^2(\alpha)$ étant une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, on en déduit que moins la variance d'une distribution X quelconque de D^n est élevé, moins l'écart-angulaire associé à cette distribution sera élevé. Aussi, moins l'écart-angulaire associé à une distribution quelconque X de D^n est élevé, moins la variance de cette distribution est élevée. Ce qu'il fallait démontrer.

b. Définition et propriétés de la relation d'ordre total de l'écart-angulaire

Selon le théorème fondamental énoncé et démontré ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'écart-angulaire associé à la distribution X est moins élevé ;
(ii) la variance de la distribution X est moins élevée.

La variance de X étant une mesure croissante de la dispersion de X, on déduit que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'écart-angulaire associé à la distribution X est moins élevé ;
(ii) la distribution X est moins inégale ;

Sur cette base donc, nous définissons la « relation d'ordre de l'écart-angulaire » sur l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n fixée, avec n>=2.

Définition de la relation d'ordre sur D^n

Soient :

- D^n l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n, n>=2 ;
- $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ deux distributions appartenant à D^n ;
- D_X et D_Y les points de cordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}_1, \dots, \vec{\imath}_n)$;
- $\hat{a}_X$ et $\hat{a}_Y$ les écarts-angulaires respectifs formés par les droites (OD_X) et (OD_Y) avec la première bissectrice du repère orthonormé.

On dit que X est moins inégale ou égale à Y au sens de l'ordre de l'écart-angulaire, si et seulement si $\hat{a}_X \leq \hat{a}_Y$. On note $X \geq_Z Y$.

On dit que X est égale à Y au sens de l'ordre de l'écart-angulaire, si et seulement si $\hat{a}_X = \hat{a}_Y$. On note $X =_Z Y$.

On dit que X est strictement moins inégale que Y au sens de l'ordre de l'écart-angulaire, si et seulement si $\hat{a}_X < \hat{a}_Y$. On note $X >_Z Y$.

La relation d'ordre ainsi définie sur D^n a-t-elle les propriétés requises pour mesurer les inégalités ? D'abord, montrons que la relation d'ordre de l'écart-angulaire est totale sur D^n. C'est-à-dire qu'elle permet de comparer deux éléments quelconques de D^n.

Propriété n°1 de la relation d'ordre de l'écart-angulaire

Soit D^n l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n fixée, avec n>=2. Alors, la relation d'ordre de l'écart-angulaire est totale sur D^n.

Preuve de la propriété n°1

On dit qu'une relation d'ordre est totale sur un ensemble si et seulement si elle permet de comparer deux éléments quelconques de cet ensemble. Alors, pour montrer la propriété n°1, considérons deux distribution quelconques $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ de D^n. La question est de savoir si on peut comparer X et Y à l'aide de relation d'ordre de l'écart-angulaire.

Notons, comme précédemment, D_X , D_Y et D_u les points de cordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ et $(1, \dots, 1)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}_1, \dots, \vec{\imath}_n)$. Alors, les droites (OD_X) et (OD_Y) correspondent respectivement aux distributions X et Y et la droite (OD_u) est la première bissectrice, à savoir l'ensemble des points de distributions égalitaires. Ces trois droites sont sécantes au point O. Alors, les droites (OD_X) et (OD_Y) forment chacune un écart-angulaire avec la droite (OD_u). Soient donc $\hat{a}_X$ et $\hat{a}_Y$ ces écarts-angulaires formés respectivement par les droites (OD_X) et (OD_Y) avec la première bissectrice (OD_u). Les mesures de $\hat{a}_X$ et $\hat{a}_Y$ étant des nombres réels (appartenant à l'intervalle [0, π/2]), ils sont comparables :

- si $\hat{a}_X > \hat{a}_Y$, alors, par définition, la distribution Y est strictement moins inégale que la distribution X, i.e. $Y >_Z X$;
- si $\hat{a}_X < \hat{a}_Y$, alors, par définition, la distribution X est strictement moins inégale que la distribution Y, i.e. $X >_Z Y$;
- si $\hat{a}_X = \hat{a}_Y$, alors, par définition, la distribution X est égale à la distribution Y, i.e. $X =_Z Y$.

Alors, la relation d'ordre de l'écart-angulaire permet de comparer deux éléments quelconques de D^n. Elle est donc totale.

L'un des principes clés de la justice sociale est l'impartialité. C'est-à-dire que la relation d'ordre ne doit pas être influencée par l'identité des individus. Donc, en vertu de ce principe, toute relation d'ordre définie sur D^n doit être impartiale.

Propriété n°2 de la relation d'ordre de l'écart-angulaire

Soit D^n l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n fixée, avec n>=2. Alors, la relation d'ordre de l'écart-angulaire est impartiale sur D^n.

Preuve de la propriété n°2

La relation d'ordre de l'écart-angulaire sur D^n sera dite impartiale si et seulement si pour tout élément X de D^n et pour toute matrice de permutation sur D^n, notée [P], on a : $X =_Z [P]X$.

De ce fait, considérons une distribution quelconque X de D^n et une matrice de permutation [P] quelconque sur D^n. Notons D_X et $D_{[P]X}$ les points de cordonnées X et $[P]X$ dans le repère orthonormé.

En rappel, toute opération de permutation de coordonnées dans le repère orthonormé est une opération de symétrique orthogonale par rapport à la première bissectrice. De ce fait, $D_{[P]X}$ est la symétrie de D_X par rapport à la première bissectrice. Alors, les écarts-angulaires formés par les droites $(OD_{[P]X})$ et (OD_X) avec la première bissectrice sont égaux. C'est-à-dire, $\hat{a}_X = \hat{a}_{[P]X}$. On en déduit que $X =_Z [P]X$. D'où l'impartialité de la relation d'ordre de l'écart-angulaire définie sur D^n.

En plus du principe de l'impartialité, une autre propriété importante dans la mesure des inégalités est que l'évaluation des distributions ne doit pas dépendre du niveau des revenus. Alors, toute relation d'ordre sur D^n doit être λ-invariante.

Propriété n°3 de la relation d'ordre de l'écart-angulaire

Soit D^n l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n fixée, avec n>=2. Alors, la relation d'ordre de l'écart-angulaire est λ-invariante sur D^n.

Preuve de la propriété n°3

La relation d'ordre de l'écart-angulaire sur D^n sera dite λ-invariante si et seulement si pour tout élément X de D^n et pour tout réel λ, on ait $X =_Z \lambda X$.

Pour démonter cela, considérons une distribution quelconque X de D^n et un réel λ quelconque. Notons D_X et $D_{\lambda X}$, les points respectifs de cordonnées X et λX dans le repère orthonormé. Les coordonnées de D_X étant égales à celles de $D_{\lambda X}$ à une constante multiplicative près, ces deux points appartiennent à une même droite passant par le point d'origine O.

Alors, les écarts-angulaires formés par les droites $(OD_{\lambda X})$ et (OD_X) avec la première bissectrice sont égaux. C'est-à-dire, $\hat{a}_X = \hat{a}_{\lambda X}$. On en déduit que $X =_Z \lambda X$. En conclusion, la relation d'ordre de l'écart-angulaire est λ-invariante sur D^n.

Maintenant, nous allons examiner la cohérence de la relation d'ordre de l'écart-angulaire, à savoir sa réflexivité, sa transitivité, ainsi que son caractère antisymétrique.

Propriété n°4 de la relation d'ordre de l'écart-angulaire

Soit D^n l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n fixée, avec n>=2. Alors, la relation d'ordre de l'écart-angulaire est réflexive sur D^n.

Preuve de la propriété n°4

On dit qu'une relation d'ordre est réflexive sur un ensemble si et seulement si pour tout élément x de cet ensemble on a : $x \leq x$. Ainsi, nous devons montrer que pour toute distribution X de D^n, on a : $X \geq_Z X$.

Soit donc X une distribution quelconque de D^n, et soit $\hat{a}_X$ l'écart-angulaire associé à la distribution X. $\hat{a}_X$ étant un réel et la relation d'ordre classique sur IR étant réflexive, on a : $\hat{a}_X \leq \hat{a}_X$. Alors, selon la définition de la relation d'ordre de l'écart-angulaire, $\hat{a}_X \leq \hat{a}_X$ équivaut à $X \geq_Z X$.

D'où la réflexivité de la relation d'ordre de l'écart-angulaire.

Propriété n°5 de la relation d'ordre de l'écart-angulaire

Soit D^n l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n fixée, avec n>=2. Alors, la relation d'ordre de l'écart-angulaire sur D^n est antisymétrique.

Preuve de la propriété n°5

On dit qu'une relation d'ordre est antisymétrique sur un ensemble si et seulement si pour tous éléments quelques x et y de cet ensemble, on a : $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$.

Considérons donc deux distributions X et Y de D^n vérifiant $X \geq_Z Y$ et $Y \geq_Z X$. Notons, comme précédemment, $\hat{a}_X$ et $\hat{a}_Y$ les écarts-angulaires respectifs associés à X et Y.

On sait que $X \geq_Z Y$ équivaut à $\hat{a}_X \leq \hat{a}_Y$ et $Y \geq_Z X$ équivaut à $\hat{a}_X \geq \hat{a}_Y$. Or sur l'ensemble des réels IR, $\hat{a}_X \leq \hat{a}_Y$ et $\hat{a}_X \geq \hat{a}_Y$ équivaut à $\hat{a}_X = \hat{a}_Y$. Ce qui signifie que les écarts-angulaires sont associés aux distributions X et Y sont égaux. Donc, les points D_X et D_Y représentant chacune de ces deux distributions sont soit sur une même droite passant par le point d'origine O, soit sur deux droites sécantes en O et symétriques par rapport à la première bissectrice.

- Si D_X et D_Y sont sur une même droite d'origine O, alors il existe un réel λ, tel que X=λY. Selon la propriété n°2 (λ-invariance), X=λY implique que $X =_Z Y$;

- Si D_X et D_Y sont sur deux droites sécantes en O et symétriques par rapport à la première bissectrice, alors il existe une matrice de permutation [P] et un réel λ, telle que X=λ[P]Y. Selon les propriétés n°2 et n°3, X=λ[P]Y implique que $X =_Z Y$.

En conclusion, $X \geq_Z Y$ et $Y \geq_Z X$ implique $X =_Z Y$.

Propriété n°6 de la relation d'ordre de l'écart-angulaire

Soit D^n l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n fixée, avec n>=2. Alors, la relation d'ordre de l'écart-angulaire est transitive sur D^n.

Preuve de la propriété n°6

On dit qu'une relation d'ordre sur une ensemble est transitive si et seulement si pour tous éléments a, b, c de cet ensemble, on a : $b \leq a$ et $c \leq b$ implique $c \leq a$.

Considérons donc trois distributions X, Y et W de D^n qui vérifient $Y \geq_Z X$ et $W \geq_Z Y$. Montrons que $W \geq_Z X$. Pour ce faire, notons, comme précédemment, $\hat{a}_X$, $\hat{a}_Y$ et $\hat{a}_W$, les écarts-angulaires respectifs associés à X, Y et W.

On sait que , d'une part, $Y \geq_Z X$ équivaut à $\hat{a}_X \geq \hat{a}_Y$ et, d'autre part, $W \geq_Z Y$ équivaut à $\hat{a}_Y \geq \hat{a}_W$.

Or dans IR, $\hat{a}_X \geq \hat{a}_Y$ et $\hat{a}_Y \geq \hat{a}_W$ implique $\hat{a}_X \geq \hat{a}_W$. Par définition, $\hat{a}_X \geq \hat{a}_W$ équivaut à $W \geq_Z X$. Ce qu'il fallait démontrer. D'où la relation d'ordre de l'écart-angulaire sur D^n est transitive.

Selon le théorème de Debreu (1959), si une relation d'ordre binaire définie sur D^n est totale, transitive et continue sur D^n, alors il existe une fonction continue F_n définie de D^n vers IR telle que pour tous X et Y de D^n, on a : $X \geq_Z Y$ équivaut à $F_n(X) \geq F_n(Y)$.

Alors, prouver la continuité de la relation d'ordre d'écart-angulaire sur D^n permettrait d'appliquer le théorème de Debreu (1959) et de trouver une telle fonction qui serait essentielle pour la construction des indices d'inégalités basés sur ladite relation d'ordre.

Propriété n°7 de la relation d'ordre de l'écart-angulaire

Soit D^n l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n fixée, avec n>=2. Alors, la relation d'ordre de l'écart-angulaire est continue sur D^n.

Preuve de la propriété n°7

On dit qu'une relation d'ordre sur un ensemble est continue si pour tout élément x de cet ensemble, les sous-ensembles $\{y, \ / \ y > x\}$ et $\{y, \ / \ x > y\}$ sont ouverts.

Considérons une distribution X de D^n et montrons que les sous-ensembles $\{Y, \ / \ Y >_Z X\}$ et $\{Y, \ / \ X >_Z Y\}$ sont ouverts.

Montrons d'abord que le sous-ensemble $A_1 = \{Y, \ / \ Y >_Z X\}$ est ouvert. Le sous-ensemble A_1 est ouvert, si pour tout Y appartenant à A_1, il existe une distribution W de D^n telle que $Y >_Z W >_Z X$.

Soit Y une distribution appartenant à A_1, alors $Y >_Z X$. Ce qui implique que les écarts-angulaires $\hat{a}_X$ et $\hat{a}_Y$ associés respectivement à X et Y sont tels que $\hat{a}_X > \hat{a}_Y$. Comme $\hat{a}_X > \hat{a}_Y$, il existe un réel α tel que $\hat{a}_X > \alpha > \hat{a}_Y$. Comme $\hat{a}_X$ et $\hat{a}_Y$ appartiennent à l'intervalle [0, π/2], alors α appartient également à cet intervalle. Donc, il existe une droite (Δ) qui forme un écart-angulaire α avec la première bissectrice. Soit W un point de cette droite (Δ) et différent de O. Alors, W est une distribution de D^n et l'écart-angulaire $\hat{a}_W$ qui lui est associé est égal à α ; ainsi on a : $\hat{a}_X > \hat{a}_W > \hat{a}_Y$. Ce qui équivaut à $Y >_Z W >_Z X$. Donc, le sous-ensemble $A_1 = \{Y, \ / \ Y >_Z X\}$ est bien ouvert.

Montrons ensuite que le sous-ensemble $A_2 = \{Y, \ / \ X >_Z Y\}$ est ouvert. Le sous-ensemble A_2 est ouvert, si pour tout Y appartenant à A_2, il existe une distribution W de D^n telle que $X >_Z W >_Z Y$.

Soit Y une distribution appartenant à A_2, alors $X >_Z Y$. Ce qui implique les écarts-angulaires $\hat{a}_X$ et $\hat{a}_Y$ associés respectivement à X et Y sont tels que $\hat{a}_X < \hat{a}_Y$. Comme $\hat{a}_X < \hat{a}_Y$, il existe un réel α tel que $\hat{a}_X < \alpha < \hat{a}_Y$. Comme $\hat{a}_X$ et $\hat{a}_Y$ appartiennent à l'intervalle [0, π/2], alors α appartient également à cet intervalle. Donc, il existe une droite (Δ) qui forme un écart-angulaire α avec la première bissectrice. Soit W un point de cette droite différent de l'origine O. Alors, W est une distribution de D^n et l'écart-angulaire $\hat{a}_W$ qui lui est associé est égal à α ; ainsi on a : $\hat{a}_X < \hat{a}_W < \hat{a}_Y$. Ce qui équivaut à $X >_Z W >_Z Y$. Donc, le sous-ensemble $A_2 = \{Y, \ / \ X >_Z Y\}$ est bien ouvert.

Alors, pour toute distribution X de D^n, les sous-ensembles $\{Y, \ / \ Y >_Z X\}$ et $\{Y, \ / X >_Z Y\}$ sont ouverts. La relation d'ordre de l'écart-angulaire est donc continue sur D^n.

c. *Fonction d'évaluation des distributions associée à l'ordre total de l'écart-angulaire*

L'ordre de l'écart-angulaire étant total, transitive et continue sur D^n, selon le théorème de Debreu (1959), il existe une fonction continue Z_n définie de D^n vers IR, telle que pour tous X et Y de D^n, on ait : $X \geq_Z Y$ équivaut à $Z_n(X) \geq Z_n(Y)$. Le théorème ci-dessous détermine donc cette fonction d'évaluation.

Théorème n°2 : Détermination de la fonction d'évaluation

Soit D^n l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n fixée, avec n>=2. Soit Z_n, une fonction définie sur D^n vers l'intervalle [0, 1], qui a tout X associe $Z_n(X) = \frac{(\bar{X})^2}{V(X)+ (\bar{X})^2}$; $\bar{X}$ et V(X) étant respectivement la moyenne arithmétique et la variance de X.

Alors : $X \geq_Z Y$ si et seulement si $Z_n(X) \geq Z_n(Y)$

$X =_Z Y$ si et seulement si $Z_n(X) = Z_n(Y)$

Preuve du théorème

La preuve de ce théorème découle de la démonstration du théorème fondamental. En effet, selon la relation (3.4) reprise ci-dessous, pour tout X de D^n, $Z_n(X)$ est égal au cosinus carré de l'écart-angulaire $\hat{a}_X$ associé à la distribution X.

$$\cos^2(\hat{a}_X) = \frac{(\bar{X})^2}{V(X)+(\bar{X})^2} = Z_n(X) \qquad (3.4\text{bis})$$

Alors, pour tout X et Y appartenant à D^n, par définition $X \geq_Z Y$ si et seulement si $\hat{a}_X \leq \hat{a}_Y$. La fonction cos²(α) étant continue et décroissante sur [0, π/2], alors $X \geq_Z Y$ si et seulement si $cos^2(\hat{a}_X) \geq cos^2(\hat{a}_Y)$. Or, selon la relation (3.4bis), $cos^2(\hat{a}_X) = Z_n(X)$ et $cos^2(\hat{a}_Y) = Z_n(Y)$. On en déduit que $X \geq_Z Y$ si et seulement si $Z_n(X) \geq Z_n(Y)$.

Par ailleurs, pour tout X et Y appartenant à D^n, par définition $X =_Z Y$ si et seulement si $\hat{a}_X = \hat{a}_Y$. La fonction cos²(α) étant continue et décroissante sur [0, π/2], alors $X =_Z Y$ si et seulement si $cos^2(\hat{a}_X) = cos^2(\hat{a}_Y)$. Avec la relation (3.4bis), on en déduit que $X =_Z Y$ si et seulement si $Z_n(X) = Z_n(Y)$.

D'où le théorème n°2. Ce théorème est à la fois puissant, simple, logique et très important. Il est puissant parce qu'il offre une fonction d'évaluation totale des distributions sur D^n, à savoir la fonction Z_n. Contrairement par exemple à la courbe de Lorenz qui peut associer une même valeur à deux distributions différentes qui ne sont ni symétriques ni λ-identiques, la fonction $Z_n$est bijective sur D^n au sens de la relation d'ordre de l'écart-angulaire. Donc, elle associe à chaque distribution X, une valeur unique et distincte de celles attribuées aux autres distributions différentes de X au sens de la relation d'ordre de l'écart-angulaire.

Le théorème n°2 est simple et logique parce que la fonction d'évaluation Z_n associe à tout X, le ratio entre le carré de la moyenne de X, et la somme de sa variance et du carré de sa moyenne. Pourtant, la moyenne et la variance (ou l'écart-type au carré) sont les indicateurs statistiques les plus utilisés aussi bien par des spécialistes que par des non spécialistes des statistiques. Ainsi, au vu de la fonction Z_n, l'on se dirait qu'il fallait tout simplement y penser. Mais, on doit reconnaitre que ce n'est pas évident de définir une fonction d'évaluation *a priori* et de chercher ensuite à définir la relation d'ordre associée avec les propriétés requises.

Enfin , le théorème n°2 est très important parce qu'il nous permet de construire des indices d'inégalités basés sur une fonction d'évaluation totale/bijective. C'est-à-dire des indices qui permettent de comparer sans ambiguïté deux distributions quelconques appartenant à D^n.

4. Indices des inégalités basés sur la relation d'ordre total de l'écart-angulaire

Avant de proposer un indice de mesure des inégalités, nous définissons la famille des indices des inégalités de la relation d'ordre total de l'écart-angulaire.

1. Famille des indices d'inégalités de la relation d'ordre total de l'écart-angulaire

Théorème n°3 : Famille des indices d'inégalités de la relation d'ordre de l'écart-angulaire

Soient :

- D^{n} l'ensemble des distributions d'une variable quantitative observée sur une population de taille n fixée, avec n>=2 ;
- $X = (x_1, \dots, x_n)$, la distribution d'une variable quantitative observée sur une population statistique de taille n>=2 ;
- H une fonction réelle continue et strictement décroissante sur l'intervalle [0, 1], telle que $\mathrm{H}(0) = 1$ et H(1) =0 ;

Alors :

- $I_Z(X) = H \circ Z_n(X)$ est un indice des inégalités de la distribution X ;
- I_Z est un indice total/bijectif, impartial, λ-invariant, normalisé et indépendant de la taille de la population ; de plus, il satisfait au principe de transfert entre les riches et les pauvres.

<u>Preuve du théorème</u>

Ce théorème est en réalité une conséquence du théorème n°2. En effet, selon le théorème n°2, Z_n est une fonction d'évaluation des distributions sur D^n, associée à la relation d'ordre de l'écart-angulaire. La fonction Z_n est une bijection croissante (au sens de la relation d'ordre de l'écart-angulaire) de D^n sur l'intervalle [0, 1]. Pour tout X appartenant à D^n, plus $Z_n(X)$ tend vers 1, moins la distribution X est inégale ; à l'inverse, plus $Z_n(X)$ tend vers 0, plus la distribution X est inégale.

Si H est une fonction réelle continue et strictement décroissante sur l'intervalle [0, 1], telle que $\mathrm{H}(0) = 1$ et H(1) =0. Alors, la fonction $H \circ Z_n$ est une fonction définie sur D^n vers l'intervalle [0, 1]. De plus, $H \circ Z_n$ est continue et strictement décroissante au sens de la relation d'ordre de l'écart-angulaire.

Aussi, pour X appartenant à D^n, $H \circ Z_n(X) = 0$ équivaut à $Z_n(X) = 1$. Or $Z_n(X) = 1$ équivaut à $\cos^2(\hat{a}_X) = 1$. Et $\cos^2(\hat{a}_X) = 1$ équivaut à $\hat{a}_X = 0$. $\hat{a}_X = 0$ équivaut à « X est une distribution parfaitement égalitaire ». Alors, $H \circ Z_n(X) = 0$ équivaut à « X est une distribution parfaitement égalitaire ».

Par ailleurs, pour X appartenant à D^n, $H \circ Z_n(X) = 1$ équivaut à $Z_n(X) = 0$. Or $Z_n(X) = 0$ équivaut à $\cos^2(\hat{a}_X) = 0$. Et $\cos^2(\hat{a}_X) = 0$ équivaut à $\hat{a}_X = \pi/2$. $\hat{a}_X = \pi/2$ équivaut à « X est une distribution totalement inégale ». Alors, $H \circ Z_n(X) = 1$ équivaut à « X est une distribution totalement inégale ».

En résumé, la fonction $I_Z = H \circ Z_n$ est une fonction continue et décroissante définie sur D^n vers l'intervalle [0, 1]. De plus, $I_Z(X) = 0$ équivaut à « X est une distribution parfaitement égalitaire » et $I_Z(X) = 1$ équivaut à « X est une distribution totalement inégale ». Alors, $I_Z = H \circ Z_n$ est un indice bijectif et normalisé de mesure des inégalités dans une population de taille n fixée.

Les propriétés d'impartialité et de λ-invariance de l'indice I_Z découlent des propriétés de la relation d'ordre de l'écart-angulaire énoncées et déjà démontrées. Concernant l'indépendance de I_Z par rapport à la taille de la population et le principe de transfert entre les riches et les pauvres, ils sont assurés par la forme de la fonction d'évaluation Z_n donnée dans le théorème n°2.

D'abord, on peut observer que cette fonction Z_n ne dépend que du carré de la moyenne de la distribution et de sa variance. Par conséquent, si X et Y sont deux distributions de la variable étudiée observées respectivement sur deux populations distinctes de tailles respectives n et m, à savoir X appartient à D^n et Y appartient à D^m, alors $\bar{X} = \bar{Y}$ et $V(X) = V(Y)$ équivaut $Z_n(X) = Z_m(Y)$. Donc, la fonction d'évaluation Z_n ne dépend pas de la taille de la population ; on en déduit que $I_Z = H \circ Z_n$ est indépendant de la taille de la population.

Ensuite, le principe de transfert voudrait que les transferts entre les riches et les pauvres qui préservent les rangs des individus réduisent les inégalités. Plus précisément, si on considère x_i et x_j des valeurs observées respectivement sur deux individus dont l'individu i est plus nanti que l'individu j : $x_i > x_j$. Si on opère un transfert (noté ε_{ij}) entre l'individu i et l'individu j de sorte que $x_i - \varepsilon_{ij} \geq x_j + \varepsilon_{ij}$, ce principe voudrait que les inégalités se réduisent.[4] Montrons que si c'est le cas, l'indice des inégalités $I_Z = H \circ Z_n$ baisse ; ce qui équivaut à montrer que Z_n s'accroit.

On a: $Z_n(X) = \frac{(\bar{X})^2}{V(X)+(\bar{X})^2} = \frac{(\bar{X})^2}{\overline{X^2}}$, comme il s'agit d'un transfert entre les individus de la population étudiée, la moyenne $\bar{X}$ ne change pas. De ce fait, $Z_n(X)$ s'accroit à la suite du transfert si et seulement si $\overline{X^2}$ baisse avec l'opération de transfert.

Comparons donc les valeurs de $\overline{X^2}$ avant et après le transfert. Faisons remarquer d'abord que :
$x_i - \varepsilon_{ij} \geq x_j + \varepsilon_{ij}$ implique $x_i - x_j \geq 2\varepsilon_{ij}$.

Avant le transfert : $\left(\overline{X^2}\right)_{av} = x_i^2 + x_j^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} x_k^2$

Après le transfert : $\left(\overline{X^2}\right)_{ap} = (x_i - \varepsilon_{ij})^2 + (x_j + \varepsilon_{ij})^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} x_k^2$

Calculons la différence des deux expressions

$$\left(\overline{X^2}\right)_{av} - \left(\overline{X^2}\right)_{ap} = x_i^2 + x_j^2 - \left(x_i - \varepsilon_{ij}\right)^2 - (x_j + \varepsilon_{ij})^2$$

$$\left(\overline{X^2}\right)_{av} - \left(\overline{X^2}\right)_{ap} = 2\varepsilon_{ij}\left[\left(x_i - x_j\right) - \varepsilon_{ij}\right]$$

Comme $x_i - x_j \geq 2\varepsilon_{ij}$, cette dernière égalité implique que $\left(\overline{X^2}\right)_{av} - \left(\overline{X^2}\right)_{ap} \geq 2(\varepsilon_{ij})^2 > 0$

On en déduit que $\overline{X^2}$ baisse avec l'opération de transfert, donc la fonction d'évaluation Z_n s'accroit avec une telle opération de transfert. Alors l'indice des inégalités $I_Z = H \circ Z_n$ baisse avec un tel transfert entre les riches et les pauvres. Par conséquent, $I_Z = H \circ Z_n$ satisfait au principe de transfert entre les riches et les pauvres.

2. *Proposition d'une sous-famille d'indices des inégalités basé sur la relation d'ordre total de l'écart-angulaire*

Selon le théorème n°3, pour construire un indice des inégalités basé sur la relation d'ordre de l'écart-angulaire, il faut trouver une fonction H continue et strictement décroissante sur l'intervalle [0 1], telle que $H(0) = 1$ et H(1) =0 et poser $I_Z = H \circ Z_n(X)$.

La fonction la plus simple qui remplit ces critères est la fonction $H_1(x) = 1 - x$, définie sur [0 1]. Dans ce cas, l'expression de l'indice des inégalités est donnée par la relation (4.1). On peut observer qu'il s'agit de l'expression du sinus carré de l'écart-angulaire.[5] I_{Z_1} est donc l'indice de base de la famille des indices I_Z de la relation d'ordre total de l'écart-angulaire. Aussi, $\arcsin\left(\sqrt{I_{Z_1}}\right)$ représente la déviation angulaire de la distribution observée par rapport à la distribution parfaitement égalitaire.

[4] ε_{ij} est positif ou négatif selon le sens du transfert.

[5] En rappel, pour tout α, cos²(α)+sin²(α)=1.

$$I_{Z_1} = 1 - \frac{(\bar{X})^2}{V(X)+(\bar{X})^2} \qquad (4.1)$$

Pour illustrer, on considère une population dont le revenu moyen est égal à 20 et la variance des revenus de cette population est égale à 480. Autrement dit, $\bar{X} = 20$ et $V(X) = 480$. Alors $I_{Z_1} = 1 - \frac{(20)^2}{480+(20)^2}$. Ce qui donne $I_{Z_1} \simeq 0{,}55$. Ce qui indique que les inégalités de revenus sont assez élevées dans cette population ($I_{Z_1} > 0{,}5$). La valeur estimée de l'indice montre que sur l'échelle de l'égalité allant de 0 à 100 paliers, il reste 55 paliers à gravir par la communauté pour atteindre le palier de « l'égalité parfaite ». Par ailleurs, la déviation angulaire de la distribution du revenu de cette population par rapport à « l'égalité parfaite » est : $\widehat{da} = \arcsin\left(\sqrt{0{,}55}\right) \simeq 48°$. Ainsi, la déviation angulaire de la distribution des revenus au sein de la population par rapport à « l'égalité parfaite » est de 48°. Elle est assez élevée car $\widehat{da} > 45°$.

A partir de l'expression de cet indice de base, on déduit un ensemble d'indices des inégalités prenant en compte les perceptions de la communauté concernée sur la justice de répartition de la variable étudiée. En effet, selon les théories économiques de la justice (Atkinson 1970, Sen 1973 et 1992, Kolm 1995), un indice de mesure des inégalités demeure un instrument de mesure purement mathématique ou statistique s'il ne tient pas compte des opinions/perceptions de la communauté sur la justice distributive concernant la variable étudiée. De ce fait, tout indice de mesure des inégalités doit tenir compte du « degré de préférence » de la communauté pour l'égalité par rapport à l'inégalité dans la répartition de la variable étudiée.

Aussi, le fait de tenir compte du degré de préférence de la communauté pour l'égalité par rapport à l'inégalité offre au statisticien des points de référence crédibles/objectifs pour apprécier et analyser les valeurs estimées des indices d'inégalités. En effet, on peut bien se poser la question de savoir pourquoi faut-il comparer la valeur estimée d'un indice des inégalités de revenus par exemple à 0 ou à 0,5 ? L'égalité parfaite ou l'inégalité moyenne est-elle l'objectif cible de la communauté en matière de justice distributive ? A quelle valeur de référence faut-il comparer la valeur estimée d'un indice sur une distribution ?

Pour tenir compte des opinions ou des préférences de la communauté étudiée en matière de justice distributive, nous désignons par θ le degré de préférence de la communauté pour l'égalité par rapport à sa préférence pour l'inégalité de la répartition de la variable étudiée au sein de la population. θ est donc un réel positif qui peut varier de 0 à plus l'infini. Plus θ est élevé, plus la préférence de la communauté pour l'égalité est forte et moins la préférence pour l'inégalité est forte. Plus θ est bas, moins la préférence de la communauté pour l'égalité est forte et plus la préférence pour l'inégalité est forte.

De ce fait, lorsque la préférence de la communauté pour l'égalité de répartition X tend vers l'infini, à savoir $\theta \to +\infty$, la moindre inégalité tend à être considérée par la communauté comme une inégalité maximale. On en déduit que pour toute distribution inégale X appartenant à D^n, si I_{Z_θ} est un indice qui tient compte des préférences en matière de justice distributive de la communauté, alors $\lim_{\theta \to +\infty} I_{Z_\theta}(X) = 1$.

Également, lorsque la préférence de la communauté pour l'égalité de répartition X tend vers 0, toute inégalité quelle que soit son ampleur tend à être considérée comme nulle. On en déduit que pour toute distribution inégale X appartenant à D^n, si I_{Z_θ} est un indice qui tient compte des préférences en matière de justice distributive de la communauté, alors $\lim_{\theta \to 0} I_{Z_\theta}(X) = 0$.

Au regard de ces conditions que doit remplir un indice qui prend en compte la justice distributive de la communauté étudiée, nous proposons la sous-famille d'indices $I_{Z_\theta} = H_\theta \circ Z_n$, où $H_\theta(x) = (1-x)^{1/\theta}$ et $\theta > 0$.

La fonction H_θ est bien une fonction réelle continue et strictement décroissante sur l'intervalle [0, 1] ; de plus, $H_\theta(0) = 1$ et $H_\theta(1)$ =0. Alors, selon le théorème n°3, $I_{Z_\theta} = H_\theta \circ Z_n$ est un indice de mesure des inégalités sur D^n qui a les propriétés énumérées dans ledit théorème n°3. Pour toute distribution X de D^n, l'expression de l'indice des inégalités I_{Z_θ} défini sur cette base est donnée par la relation (4.2).

$$I_{Z_\theta} = \left(1 - \frac{(\bar{X})^2}{V(X)+(\bar{X})^2}\right)^{1/\theta} \qquad (4.2)$$

Ainsi, nous avons défini une sous-famille d'indices de mesure des inégalités basés la relation d'ordre total de l'écart-angulaire qui est bijective, transitive, impartiale, λ-invariante, indépendante de la taille de la population, qui respecte le principe de transferts entre riches et pauvres et qui prend en compte la justice distributive de la communauté étudiée. Cependant, le problème n'est pas totalement résolu car une question reste posée : comment déterminer θ, à savoir le degré de préférence de la communauté pour l'égalité rapport à sa préférence pour l'inégalité ?

On sait que le degré de préférence de la communauté pour l'égalité par rapport à sa préférence pour l'inégalité influe sur le choix optimal de la communauté en matière de répartition de la variable étudiée. De ce fait, le choix optimal de la communauté en termes de répartition ou d'inégalités dépend du degré de préférence θ de l'égalité par rapport à la préférence pour l'inégalité. Alors, la connaissance de la relation entre ce niveau optimal d'inégalités et le rapport des préférences respectives pour l'égalité et pour l'inégalité permettrait de répondre à la question de savoir comment déterminer le paramètre de justice distributive θ.

Pour ce faire, nous considérons qu'en matière de justice distributive, la fonction d'utilité collective dépend du niveau d'égalité (noté EQ) et du niveau d'inégalité (IQ). Considérons que la fonction d'utilité collective a la forme d'une fonction de Cobb-Douglas, avec α et β, des coefficients qui rendent compte respectivement du niveau de préférence de la communauté pour l'égalité et de son niveau de préférence pour les inégalités. Alors, l'expression de la fonction d'utilité collective en matière de répartition de la variable étudiée est donnée par la relation (4.3), où $\alpha + \beta = 1$.

$$U(EQ, IQ) = (EQ)^\alpha (IQ)^\beta \qquad (4.3)$$

L'indice des inégalités de la communauté étant I_{Z_θ}, on a : $EQ = 1 - I_{Z_\theta}$ et $IQ = I_{Z_\theta}$. Aussi, par définition, θ mesure le degré de préférence de l'égalité par rapport à la préférence pour l'inégalité, alors $\theta = \alpha/\beta$. Comme $\alpha + \beta = 1$, on en déduit que $\alpha = \theta/(1+\theta)$ et $\beta = 1/(1+\theta)$. Alors, la fonction d'utilité collective de la communauté donnée par la relation (4.3) peut donc se mettre sous la forme donnée par la relation (4.4).

$$U(I_{Z_\theta}) = (1 - I_{Z_\theta})^{\frac{\theta}{\theta+1}} (I_{Z_\theta})^{\frac{1}{\theta+1}} \qquad (4.4)$$

Avant de chercher à déterminer le paramètre θ, faisons observer que pour un niveau fixé d'inégalités, on a : $\lim_{\theta \to +\infty} U(I_{Z_\theta}(X)) = 1 - I_{Z_\theta}$. Cela signifie que lorsque dans une communauté donnée, les perceptions ou les opinions en matière de justice distributive concernant la variable étudiée convergent vers l'égalité parfaite, (i.e. si $\theta \to +\infty$), la moindre inégalité est jugée inacceptable par la communauté et, est considérée alors comme très élevée, car elle réduit le bien-être collectif. De ce fait, plus la justice distributive relative à la variable étudiée est exigeante en termes d'égalité (i.e. plus θ est élevé), plus les inégalités seront jugées élevées par la communauté, et plus l'indice des inégalités tenant compte de la justice distributive sera élevé. Alors, pour une distribution X donnée, l'indice de mesure des inégalités doit augmenter lorsque θ augmente. La sous-famille des indices I_{Z_θ} proposée vérifie cette condition.

En rappel, le paramètre θ peut être déterminé à partir de l'expression du choix optimal d'inégalités de la communauté. Ce choix optimal de la communauté en matière d'inégalités est obtenu par la maximisation de la fonction d'utilité collective par rapport à l'indice des inégalités I_{Z_θ}. L'optimisation de cette fonction d'utilité donne la relation (4.5) qui indique que θ est égal au ratio entre $1 - I_{Z_\theta}^*$et $I_{Z_\theta}^*$, la valeur $I_{Z_\theta}^*$ de l'indice des inégalités étant la valeur cible optimale visée par la communauté au regard de ces opinions/perceptions en matière de justice distributive concernant la variable étudiée.

$$\theta = \frac{1-I_{Z_\theta}^*}{I_{Z_\theta}^*} \qquad (4.5)$$

La relation (4.5) confirme que le paramètre θ est le degré de préférence de l'égalité par rapport à la préférence pour l'inégalité. En effet, moins $I_{Z_\theta}^*$ est élevé, plus θ sera élevé. Autrement dit, plus le niveau d'inégalités jugé acceptable par la communauté est bas, plus le degré de préférence de cette communauté pour l'égalité par rapport à sa préférence pour les inégalités sera considéré élevé. A l'inverse, plus le niveau d'inégalités jugé acceptable par la communauté est élevé, plus le degré de préférence de cette communauté pour l'égalité par rapport à sa préférence pour les inégalités sera considéré bas.

Ainsi, sur la base de la relation (4.5), nous établissons le tableau 4.1 qui donne la valeur du paramètre θ de l'indice I_{Z_θ} en fonction de quelques valeurs cibles optimales potentielles de la communauté en matière d'inégalité, sans prétendre à l'exhaustivité.

Tableau 4.1 : Valeur du paramètre θ selon la valeur cible de l'indice des inégalités

$I_{Z_\theta}^*$	0,10	0,13	0,14	0,17	0,18	0,20	0,22	0,25	0,29	0,33	0,40	0,50	0,67
θ	9,00	7,00	6,02	5,00	4,50	4,00	3,50	3,00	2,50	2,00	1,50	1,00	0,50

Source : Le présent papier

Il ressort que pour $\theta < 2{,}5$ la valeur cible $I_{Z_\theta}^*$ associée est supérieure à 0,3 ; à l'inverse, pour $\theta > 4{,}5$, la valeur cible $I_{Z_\theta}^*$ associée est inférieure à 0,2. Si par exemple, les valeurs cibles d'inégalités supérieures à 0,30 ou inférieures à 0,2 sont considérées dans la communauté comme des situations extrêmes en matière de préférence pour l'égalité de distribution des revenus. Alors, à défaut de disposer de l'information précise sur la valeur cible des inégalités de revenus d'une telle communauté, on pourrait utiliser une valeur de θ comprise entre 2,5 et 4,5 dans la formule de l'indice des inégalités basé sur la relation d'ordre total de l'écart-angulaire.

Il parait important de préciser que compte tenu du fait que les exigences en matière de justice distributive dépendent de la communauté étudiée, ainsi que de la variable étudiée, le choix du paramètre θ doit tenir compte de ces deux dimensions au moins.

5. Conclusion

Après avoir constaté que la théorie économique de mesure des inégalités a été longtemps limitée par la non-découverte d'une relation d'ordre total sur l'ensemble des distributions de revenus, ce papier s'est fixé l'objectif audacieux de trouver une relation d'ordre total sur ledit ensemble et de proposer des indices de mesure des inégalités plus pertinents. Cet objectif est atteint. En effet, une relation d'ordre total a été définie sur l'ensemble des distributions d'une variable quantitative donnée. Baptisée « relation d'ordre total de l'écart-angulaire », cette relation d'ordre total est cohérente, impartiale, continue et λ-invariante. Ainsi, la fonction d'évaluation associée à cette relation d'ordre total a permis de proposer une famille d'indices de mesure des inégalités qui respectent, entre autres, les propriétés d'impartialité, de λ-invariance, de normalité, d'indépendance par rapport à la taille de la population, ainsi que le principe de transfert entre les riches et les pauvres, et qui prend en compte la justice distributive. Aussi, contrairement aux indices déjà existants, les indices proposés sont des fonctions bijectives sur l'ensemble des distributions de revenus vers l'intervalle [0, 1]. Autrement dit, ces nouveaux indices de mesure des inégalités ont la capacité de comparer sans ambiguïté les distributions d'une variable quantitative donnée, en associant une valeur distincte à chaque situation d'inégalités. Ce papier offre donc de nouvelles perspectives de développement à la théorie de mesure des inégalités à travers la découverte de la relation d'ordre total de l'écart-angulaire sur l'ensemble des distributions.

Bibliographie

Atkinson, A. B. 1970. On the measurement of inequality. Journal of economic theory, 2(3), 244-263.

Dalton, H. 1920. The Measurement of the inequality of Incomes. Economic Journal, 30, 348–361.

Debreu, G. 1959. Theory of Value. John Wiley, New York

Gajdos, T. 2001. Les fondements axiomatiques de la mesure normative des inégalités. Revue d'Economie Politique, 2001, 5, pp.683-720.

Hansson, B. 1977. The Measurement of Social Inequality. in Logic, Methodology and Philosophy of Science, ed. by R. Butts, and J. Hintikka, Dordrecht. Reidel.

Kakwani N. 1977. Applications of Lorenz curves in economic analysis. Econometrica, 45, 3. pp. 719-727.

Kolm, S.-C. 1969. "The Optimal Production of Social Justice," in Public Economics, ed. By J. Margolis, and S. Guitton, London. MacMillan.

Kolm, S.-C. 1976a. Unequal Inequalities II, Journal of Economic Theory, 13, 82–111.

Kolm, S.-C. 1976b. Unequal Inequalities I, Journal of Economic Theory, 12, 416–442.

Kolm, S.-C. 1995. Modern Theories of Justice. MIT Press, Cambridge.

Mesnard, L. 1997. A propos des problèmes causés par les indices de mesure d'inégalités de Gini et Kakwani. Document de travail n°9713. LATEC, Université de Bourgogne.

Pigou, A. 1912. Wealth and Welfare. MacMillan, London.

PNUD 2010. La vraie richesse des nations : les chemins de développement humain. Rapport sur le développement humain 2010. Edition du 20è anniversaire. Programme des nations unies pour le développement. New York.

PNUD 2011. Durabilité et Equité : un meilleur avenir pour tous. Rapport sur le développement humain 2011. Programme des nations unies pour le développement. New York.

Sen, A. 1973. On Economic Inequality. Clarendon Press, Oxford.

Sen, A. 1977. On Weights and Measures : Informational Constraints in Social Welfare Analysis. Econometrica, 45, 1539–1572.

Sen, A. 1978. Ethical Measurement of Inequality : Some Difficulties in Personal Income Distribution, ed. by S. Krelle. North-Holland, Amsterdam.

Sen, A. 1982. Equality of What ?, in Choice, Welfare and Measurement, pp. 353–369, Cambridge MA. MIT Press.

Sen, A. 1992 : Inequality reexamined. Harvard University Press, Mass. Wakker.

Theil, H. 1967. Economics and Information Theory. Rand McNally.